i) Philosophie (voir section A1)

## j) Mathématiques I

I Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 1\\ 0 & 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2$. En déduire $A^{-1}$.

2) Calculer $B^2$, $B^3$ et $B^4$. Trouver une formule de récurrence permettant de calculer $B^n$ pour tout entier naturel $n$ non nul. Justifier.

3) Déterminer la matrice $X$ vérifiant $AX = 4B$.

4) Déterminer toutes les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $B - mI_3$ ne soit pas inversible.

(4+8+4+4 = 20 points)

II Résoudre le système suivant par la méthode des pivots de Gauss

$$\begin{cases} x+z=3 \\ x+y-2z+t=2 \\ 3x+2y+z-2t=-1 \\ -5x+5y+t=-12 \end{cases}$$

(13 points)

III Soit l'équation $z^3-(10-i)z^2+(20-6i)z-28+36i=0$.

Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

(14 points)

IV Soit le nombre complexe $z=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$.

1) Déterminer $Z=z^2$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2) Calculer sous forme exponentielle les racines carrées complexes de $Z$.

3) En déduire $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

(5+5+3=13 points)