

I) Mathématiques I

I) Soit le polynôme à variable complexe

$$P(z) = 2iz^3 + 2(10 + 4i)z^2 + (56 - 51i)z - 27 - 96i$$

- 1) Montrer que le polynôme admet une racine imaginaire pure.
- 2) Chercher les solutions de l'équation $P(z) = 0$

(6 + 12 = 18 points)

II) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que la matrice A est inversible et chercher la matrice inverse de A

2) Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y - z = \frac{5}{2} \\ y + z = \frac{-1}{2} \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

3) Résoudre l'équation matricielle: $AXA = A^2B$

(8+6+6 = 20 points)

III) Soit les nombres complexes $a = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{\sqrt{3} - i}$ et $b = \frac{(1 + 5i)(3 - 4i)}{6 + 17i}$

1) Mettre les nombres a, b et $Z = \frac{a}{b}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2) Dédire des résultats la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

3) Calculer la forme algébrique du nombre complexe $a^4 b^{-2}$

(12 + 5 + 5 = 22 points)